ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки

Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-738-744

УДК 517.911.5

АППРОКСИМАЦИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

© **В. В. Скоморохов**

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106
E-mail: uaa@nnn.tstu.ru

Аннотация. В работе изучаются гиперболические дифференциальные включения дробного порядка с импульсными воздействиями. Дано определение приближенного решения (δ -решения) гиперболического дифференциального включения дробного порядка с импульсными воздействиями, установлены асимптотические свойства множеств решений аппроксимирующих дифференциальных включений дробного порядка с внешними возмущениями.

Ключевые слова: гиперболические дифференциальные включения; дробная производная; импульсные воздействия; аппроксимирующее отображение; радиус внешних возмущений; модуль непрерывности отображения; δ -решение

Введение

Изучению дифференциальных включений дробного порядка посвящены работы многих известных российских и зарубежных математиков [1–3]. Это связано с тем, что дифференциальные включения дробного порядка оказались удобным инструментом в моделировании многих явлений в различных областях науки и техники. Действительно, мы можем найти многочисленное их применение к задачам прикладной математики, физики, экономики, биологии, химической технологии и т. д. Дифференциальные включения с импульсным воздействием стали важны при моделировании процессов и явлений реального времени [4, 5].

Стоит отметить, что процесс моделирования связан с теми или иными погрешностями. Они возникают, прежде всего, в связи с тем, что сама математическая модель описывает процесс с некоторыми допущениями и предположениями. Кроме того, построение самого многозначного отображения, порождающего дифференциальное включение дробного порядка и описывающего модель, связано с той или иной степенью точности.

Поэтому аппроксимация дифференциального включения дробного порядка является актуальной задачей (см., например, [6]).

1. Основные понятия

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное векторное пространство с нормой $|\cdot|$; $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ – множество всех непустых, компактов $\mathbb{R}^n$; $h[\cdot,\cdot]$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами, содержащимися в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим $C^n([0,a]\times[0,b])$ пространство непрерывных функций $u\colon [0,a]\times[0,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|u\| = \max\{|u(t,x)|\colon (t,x)\in[0,a]\times[0,b]\}$. $L^n([0,a]\times[0,b])$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $u\colon [0,a]\times[0,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|u\| = \int\limits_0^a\int\limits_0^b |u(t,x)|\,dtdx$.

Будем говорить, что $F\colon [0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори, если выполняются следующие условия:

1) при каждом $u\in\mathbb{R}^n$ отображение $F(\cdot,\cdot,u)$ измеримо;

2) при почти всех $(t,x)\in[0,a]\times[0,b]$ отображение $F(t,x,\cdot)$ непрерывно;

3) для каждого ограниченного множества $V\subset\mathbb{R}^n$ найдется такая функция $m_V(\cdot,\cdot)\in L^1([0,a]\times[0,b])$, что при почти всех $(t,x)\in[0,a]\times[0,b]$ и всех $u\in V$ выполняется неравенство $\|F(t,x,u)\|\leqslant m_V(t,x)$.

Пусть $t_k\in[0,a]$ ($0<t_1<\ldots<t_m<a$) – конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n([0,a]\times[0,b])$ множество всех непрерывных на каждом из промежутков $[0,t_1]\times[0,b]$, $(t_1,t_2]\times[0,b]$, $\ldots$, $(t_m,a]\times[0,b]$ ограниченных функций $u\colon[0,a]\times[0,b]\to\mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках (t_k,x), $k=1,2,\ldots,m$, $\lim\limits_{\substack{t\to t_k+0\\ y\to x}} u(t,y) = u(t_k+0,x)$, с нормой $\|u\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n([0,a]\times[0,b])} = \sup\{|u(t,x)|\colon (t,x)\in[0,a]\times[0,b]\}$.

Пусть $(r,p)\in(0,1]\times(0,1]$. Для $f(t,x)\in L^n([0,a]\times[0,b])$ выражение

$$I_0^{(r,p)}f(t,x) = \frac{1}{\Gamma(r)\Gamma(p)}\int_0^t\!\!\int_0^x \frac{f(s,\tau)}{(x-s)^{1-r}(y-\tau)^{1-p}}dsd\tau,$$

назовем *смешанным левосторонним интегралом Римана–Лиувилля* порядка (r,p), $\Gamma(\cdot)$ –гамма-функция. Дробная *производная Капуто* порядка (r,p) определяется выражением

$$D_0^{(r,p)}f(t,x) = I_0^{(1-r,1-p)}\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}f(t,x).$$

Рассмотрим задачу

$$D_0^{(r,p)}u(t,x)\in F(t,x,u(t,x)),\quad (t,x)\in[0,a]\times[0,b], \tag{1}$$

$$\Delta(u(t_k,x)) = \mathcal{I}_k(u(t_k,x)),\quad k=1,2,\ldots,m, \tag{2}$$

$$u(t,0)=\alpha(t),\quad u(0,x)=\beta(x), \tag{3}$$

где $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, непрерывны и $\alpha(0)=\beta(0)$, отображение $F\colon[0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Отображения $\mathcal{I}_k\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $k=1,2,\ldots,m$, непрерывны, $\Delta(u(t_k,x)) = u(t_k+0,x)-u(t_k,x)$, $k=1,2,\ldots,m$.

Под *решением задачи* (1)–(3) будем понимать функцию $u \in \widetilde{\mathbf{C}}^n([0,a]\times[0,b])$, для которой существует такое $q \in L^n([0,a]\times[0,b])$, что при почти всех $(t,x)\in[0,a]\times[0,b]$ выполняется включение $q(t,x)\in F(t,x,u(t,x))$, и при всех $(t,x)\in[0,a]\times[0,b]$ имеет место представление

$$u(t,x)=\alpha(t)+\beta(x)-\alpha(0)+\sum_{k=1}^{m}\chi_{(t_k,b]}\mathcal{I}_k(u(t_k,x))+\frac{1}{\Gamma(r)\Gamma(p)}\int_0^t\!\!\int_0^x\frac{q(s,\tau)}{(x-s)^{1-r}(y-\tau)^{1-p}}dsd\tau.$$

Обозначим через $K([0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ множество всех функций $\eta\colon[0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, обладающих следующими свойствами:

1) при каждых $(u,\delta)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ функция $\eta(\cdot,\cdot,u,\delta)$ измерима;

2) при почти всех $(t,x)\in[0,a]\times[0,b]$ и всех $\delta\in[0,\infty)$ функция $\eta(t,x,\cdot,\delta)$ непрерывна;

3) для каждых $U\in\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta\in[0,\infty)$ существует такая суммируемая функция $\mu_{U,\delta}\colon[0,a]\times[0,b]\to[0,\infty)$, что при почти всех $(t,x)\in[0,a]\times[0,b]$ и всех $u\in U$ и $\tau\in[0,\delta]$ выполняется неравенство $\eta(t,x,u,\tau)\leqslant\mu_{U,\delta}(t,x)$;

4) при почти всех $(t,x)\in[0,a]\times[0,b]$ и каждого $u\in\mathbb{R}^n$ выполняются равенства $\lim\limits_{\substack{z\to u\\ \delta\to0+0}}\eta(t,x,z,\delta)=\eta(t,x,u,0)=0$.

Обозначим через $P([0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ множество всех функций $\eta\colon[0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, обладающих свойствами из класса функций $K([0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, а также удовлетворяющих следующим условиям: для каждых $U\in\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta\in(0,\infty)$ найдутся такие числа $r(U,\delta)>0$ и $\gamma(U,\delta)\geqslant0$, что при почти всех $(t,x)\in[0,a]\times[0,b]$ и всех $u\in U$ число $r(U,\delta)$ удовлетворяет неравенству $r(U,\delta)\leqslant\eta(t,x,u,\delta)$, а для числа $\gamma(U,\delta)$ при почти всех $(t,x)\in[0,a]\times[0,b]$, всех $u\in U$ и $\tau\in[0,\delta]$ имеет место оценка $\eta(t,x,u,\tau)\leqslant\gamma(U,\delta)$.

Пусть $\psi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in P([0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. Определим функцию $\varphi(\psi)\colon[0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ равенством

$$\varphi(\psi)(t,x,u,\delta)=\sup_{v\in B[u,\psi(t,x,u,\delta)]}h[F(t,x,u),F(t,x,v)].$$

Значения функции $\varphi(\psi)(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ в точке (t,x,u,δ) будем называть *модулем непрерывности отображения* $F\colon[0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ в точке (t,x,u) по переменной u в шаре $B[u,\psi(t,x,u,\delta)]$, функцию $\psi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ – *функцией радиуса модуля непрерывности* или просто радиусом непрерывности, а саму функцию $\varphi(\psi)(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ – *функцией модуля непрерывности* или просто модулем непрерывности отображения $F\colon[0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ относительно радиуса непрерывности $\psi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$.

Будем говорить, что многозначное отображение $\widetilde{F}\colon[0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ *аппроксимирует* отображение $F\colon[0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, если найдется такая функция $\xi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in K([0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, что при почти всех $(t,x)\in[0,a]\times[0,b]$ и всех $(u,\delta)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ выполняется оценка

$$h[F(t,x,u),\widetilde{F}(t,x,u,\delta)]\leqslant\xi(t,x,u,\delta). \tag{4}$$

Отображение $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть *аппроксимирующим отображение* $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ или просто аппроксимирующим. Функция $\xi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in K([0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ в неравенстве (4) определяет степень близости значения $\widetilde{F}(t,x,u,\delta)$ в точке $(t,x,u)\in[0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n$ к значению $F(t,x,u)$ для каждого фиксированного $\delta\in[0,\infty)$. Эту функцию $\xi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть *степенью аппроксимации отображения* $F\colon[0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\to\operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ отображением $\widetilde{F}\colon[0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ или просто степенью аппроксимации.

Пару $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot))$ будем называть *аппроксимацией отображения* $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ или просто аппроксимацией, а если при почти всех $(t,x)\in[0,a]\times[0,b]$ и всех $(u,\delta)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ выполняется включение $F(t,x,u)\subset\widetilde{F}(t,x,u,\delta)$, то *аппроксимацией вложением.*

Значения аппроксимирующего отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ могут вычисляться с некоторой степенью точности, которую можно задать некоторой функцией

$$\eta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in K([0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)).$$

В связи с этим рассмотрим отображение $Q_\eta\colon[0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$, определенное равенством

$$Q_\eta(t,x,u,\delta)=\widetilde{F}(t,x,u,\delta)^{\eta(t,x,u,\delta)},\tag{5}$$

где функция $\eta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in K([0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ в каждой точке $(t,x,u)\in[0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном $\delta\in[0,\infty)$ определяет погрешность вычисления значений аппроксимирующего отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$. Далее, функцию $\eta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть *радиусом внешних возмущений аппроксимирующего отображения* $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ или просто радиусом внешних возмущений.

2. Основные результаты

Пусть $\eta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in K([0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. Рассмотрим при каждом фиксированном $\delta\in[0,\infty)$ дифференциальное включение

$$D_0^{(r,p)}u(t,x)\in Q_\eta(t,x,u(t,x),\delta),\tag{6}$$

где отображение $Q_\eta\colon[0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ задано равенством (5). Дифференциальное включение (6) будем называть *аппроксимирующим дифференциальное включение* (1) *с внешними возмущениями.*

Каждое решение включения (6) с импульсными воздействиями (2) и условиями (3) при фиксированном $\delta>0$ будем называть δ*-решением* (приближенным решением с точностью до δ или просто приближенным решением) *включения* (1).

Пусть отображение $F\colon[0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\to\operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Рассмотрим задачу

$$D_0^{(r,p)}u(t,x)\in\operatorname{co}F(t,x,u(t,x)),\tag{7}$$

$$\Delta(u(t_k,x))=\mathcal{I}_k(u(t_k,x)),\quad k=1,2,\dots,m,\tag{8}$$

$$u(t,0)=\alpha(t), \quad u(0,x)=\beta(x), \tag{9}$$

где $\operatorname{co} F(\cdot,\cdot,u(\cdot,\cdot))$ – выпуклая оболочка множества $F(\cdot,\cdot,u(\cdot,\cdot))$, отображения $\mathcal{I}_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k=1,2,\ldots,m$, непрерывны, $\Delta(u(t_k,x))=u(t_k+0,x)-u(t_k,x)$, $k=1,2,\ldots,m$, $\alpha(\cdot),\beta(\cdot)$, непрерывны и $\alpha(0)=\beta(0)$.

Обозначим через $H(V)$, $H_{\mathrm{co}}(V)$ множества решений задач (1)–(3) и (7)–(9), соответственно, принадлежащих множеству $V\subset \widetilde{\mathbf{C}}^n([0,a]\times[0,b])$.

Пусть $V\subset \widetilde{\mathbf{C}}^n([0,a]\times[0,b])$, $\eta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in K([0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. Обозначим через $H_{\eta(\delta)}(V)$ множество всех решений задачи (6), (2), (3) с заданным радиусом внешних возмущений, принадлежащих множеству V.

Теорема 1. *Пусть V – ограниченное замкнутое множество пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n([0,a]\times[0,b])$ и пусть $\psi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in P([0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. Далее, пусть пара $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображения $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ вложением. Тогда для любой функции $\eta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in K([0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, для которой существует такое число $\varepsilon>0$, что при почти всех $(t,x)\in[0,a]\times[0,b]$, всех $u\in(U(V))^{\varepsilon}$ и $\delta\in[0,\infty)$ имеет место неравенство*

$$\varphi(\psi)(t,x,u,\delta)\leqslant \eta(t,x,u,\delta),$$

где $\varphi(\psi)(t,x,u,\delta)$ – модуль непрерывности отображения $F(\cdot,\cdot,\cdot)$, выполняется соотношение

$$H_{\mathrm{co}}(V)=\bigcap_{\delta>0}\overline{H_{\eta(\delta)}(V^{\delta})},$$

где $\overline{H_{\eta(\delta)}(V^{\delta})}$ – замыкание в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n([0,a]\times[0,b])$ множества $H_{\eta(\delta)}(V^{\delta})$, V^{δ} – замкнутая в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n([0,a]\times[0,b])$ δ–окрестность множества V.

Пусть V – ограниченное замкнутое множество пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n([0,a]\times[0,b])$ и пусть $\psi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in P([0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. Будем говорить, что *аппроксимация дифференциального включения* (1) *устойчива на ограниченном замкнутом множестве $V\subset \widetilde{\mathbf{C}}^n([0,a]\times[0,b])$ относительно внешних возмущений из класса $K([0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$*, если для любой функции $\eta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in K([0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ выполняется равенство

$$\overline{H(V)}=\bigcap_{\delta>0}\overline{H_{\eta(\delta)}(V^{\delta})}.$$

Теорема 2. *Пусть V – ограниченное замкнутое множество пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n([0,a]\times[0,b])$. Далее, пусть пара $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображения $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ вложением. Тогда для того, чтобы для любой функции*

$$\eta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in K([0,a]\times[0,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$$

аппроксимация дифференциального включения была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы для задачи (1)–(3) *на множестве V выполнялось равенство*

$$\overline{H(V)}=H_{\mathrm{co}}(V).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

3. *Витюк А.Н.* Существование решений дифференциальных включений с частными производными дробных порядков // Известия высших учебных заведений. Математика. 1997. № 8. С. 13-19.

4. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987.

5. *Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.

6. *Булгаков А.И., Скоморохов В.В., Филиппова О.В.* Асимптотические свойства множества δ-решений функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1039-1043.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.

Скоморохов Виктор Викторович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: uaa@nnn.tstu.ru

Для цитирования: *Скоморохов В.В.* Аппроксимация гиперболических дифференциальных включений дробного порядка с импульсными воздействиями // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 738–744. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-738-744

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-738-744

APPROXIMATION OF HYPERBOLIC DIFFERENTIAL INCLUSIONS OF FRACTIONAL ORDER WITH IMPULSES

V. V. Skomorokhov

Tambov State Technical University
106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: uaa@nnn.tstu.ru

Abstract. In this paper there are considered hyperbolic differential inclusions of fractional order with impulses. Here we represent the concept of approximate solution (δ -solution) for a hyperbolic differential inclusion of fractional order with impulses. The asymptotic properties of solutions sets to approximating differential inclusions of fractional order with external disturbance are derived.

Keywords: hyperbolic differential inclusions; fractional derivative; impulses; approximating map; radius of external perturbations; modulus of continuity; δ -solution.

REFERENCES

1. Filippov A.F. *Differentsial'nyye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu* [Differential Equations with Discontinuity Right Part]. Moscow, Nauka Publ., 1985. (In Russian).

2. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya* [Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1987. (In Russian).

3. Vityuk A.N. Sushchestvovaniye resheniy differentsial'nykh vklyucheniy s chastnymi proizvodnymi drobnykh poryadkov [Existence of solutions of partial differential inclusions of fractional order]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 1997, no. 8, pp. 13-19. (In Russian).

4. Samoylenko A.M., Perestyuk N.A. *Differentsial'nyye uravneniya s impul'snym vozdeystviyem* [Impulsive Differential Equations]. Kiev, Vishcha shkola Publ., 1987. (In Russian).

5. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. *Impul'snyye protsessy. Modeli i prilozheniya* [Impulse Processes. Models and Applications]. Moscow, Nauka Publ., 1991. (In Russian).

6. Bulgakov A.I., Skomorokhov V.V., Filippova O.V. Asimptoticheskiye svoystva mnozhestva δ -resheniy funktsional'no-differentsial'nogo vklyucheniya s impul'snymi vozdeystviyami [Asymptotic properties of the set of δ -solutions to differential inclusion with impulses]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2011, vol. 16, no. 4, pp. 1039-1043. (In Russian).

Received 18 April 2018
Reviewed 21 May 2018
Accepted for press 26 June 2018

Skomorokhov Victor Victorovich, Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: uaa@nnn.tstu.ru

For citation: Skomorokhov V.V. Approksimatsiya giperbolicheskikh differentsial'nykh vklyucheniy drobnogo poryadka s impul'snymi vozdeystviyami [Approximation of hyperbolic differential inclusions of fractional order with impulses]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 738–744. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-738-744 (In Russian, Abstr. in Engl.).